

《随机过程》课程总复习

2026-06-22

这是我在《随机过程 B》课程总复习期间整理的笔记。

前置知识

先需要列举一些对于该课程可能有用的一些知识:

一些常用的积分

这些积分必须要牢记:

$$\int_0^{\infty} e^{-(a+bj)x} dx = \frac{1}{a+bj} = \frac{a}{a^2+b^2} - j \frac{b}{a^2+b^2}$$
$$\Rightarrow \int_0^{\infty} e^{-ax} \cos(bx) dx = \frac{a}{a^2+b^2}, \quad \int_0^{\infty} e^{-ax} \sin(bx) dx = \frac{b}{a^2+b^2}$$

留数与积分计算

留数定理:

$$\int_{\partial D} f(z) dz = 2\pi j \sum_{k=1}^n \text{Res}(f, z_k)$$

有限点处留数的计算:

$$\text{Res}(f, a) = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \rightarrow a} [(z-a)^m f(z)]^{(m-1)}$$
$$m=1 \Rightarrow \text{Res}(f, a) = \lim_{z \rightarrow a} (z-a)f(z)$$

结合复变函数中的一些引理 (特别是 Jordan 引理) 可以构造一些围道 (比如半圆) 计算一些实数轴上的积分。

随机变量和

矩母函数:

$$g(t) = E(\exp\{tX\}) = \int \exp\{tx\} dF(x)$$
$$g_{X+Y}(t) = g_X(t)g_Y(t), \quad E[X_n] = g^{(n)}(0)$$

随机和的矩母函数 (也可以用全方差公式 $\text{Var}(Y) = E[\text{Var}(Y | N)] +$

常用随机变量的分布与矩母函数

分布	$P(X=x)$ 或 $f(x)$	矩母函数	EX	$\text{Var}(X)$
二项分布 $B(n, p), 0 \leq p \leq 1$	$\binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}, x=0, 1, \dots, n$	$(pe^t + (1-p))^n$	np	$np(1-p)$
Poisson 分布, $\lambda > 0$	$e^{-\lambda} \frac{\lambda^x}{x!}, x=0, 1, 2, \dots$	$\exp\{\lambda(e^t - 1)\}$	λ	λ
几何分布, $0 \leq p \leq 1$	$p(1-p)^{x-1}, x=1, 2, \dots$	$\frac{pe^t}{1 - (1-p)e^t}$	$\frac{1}{p}$	$\frac{1-p}{p^2}$
负二项分布, 参数为 r, p	$\binom{x-1}{r-1} p^r (1-p)^{x-r}, x=r, r+1, \dots$	$\left(\frac{pe^t}{1 - (1-p)e^t} \right)^r$	$\frac{r}{p}$	$\frac{r(1-p)}{p^2}$
均匀分布 $U(a, b)$	$\frac{1}{b-a}, a < x < b$	$\frac{e^{tb} - e^{ta}}{t(b-a)}$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$
指数分布, $\lambda > 0$	$\lambda e^{-\lambda x}, x \geq 0$	$\frac{\lambda}{\lambda - t}$	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{1}{\lambda^2}$
Γ 分布 $\Gamma(n, \lambda), \lambda > 0$	$\frac{\lambda e^{-\lambda x} (\lambda x)^{n-1}}{(n-1)!}, x \geq 0$	$\left(\frac{\lambda}{\lambda - t} \right)^n$	$\frac{n}{\lambda}$	$\frac{n}{\lambda^2}$
正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-(x-\mu)^2/(2\sigma^2)}$	$\exp\left\{\mu t + \frac{\sigma^2 t^2}{2}\right\}$	μ	σ^2
Beta 分布 $B(a, b), a > 0, b > 0$	$c x^{a-1} (1-x)^{b-1}, 0 < x < 1, c = \frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)}$	-	$\frac{a}{a+b}$	$\frac{ab}{(a+b)^2(a+b+1)}$

Poisson 过程

定义: 初始为 0, 满足独立增量的过程, 满足:

$$P\{N(s+t) - N(s) = k\} = e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^k}{k!}$$

Poisson 过程还可以用一些其他的视角来看待, 也需要掌握:

联合密度的视角, 给定 $N(t) = n$, 则等待时间 $W_1, W_2, \dots, W_n$ 的联合密度为:

$$f_{W_1, W_2, \dots, W_n}(w_1, w_2, \dots, w_n) = \frac{n!}{t^n}, \quad 0 < w_1 < w_2 < \dots < w_n < t$$

间隔时间的视角, 记第 $n-1$ 与 n 次事件的间隔时间为 X_n , 第 n 次事件的发生事件为 $W_n = \sum_{i=1}^n X_i$:

$$X_n \sim \text{Exp}(\lambda), \quad W_n \sim \Gamma(n, \lambda)$$

Poisson 过程的推广

非时齐 Poisson 过程中 λ 不是常数, 而是 $P\{N(t+h) - N(t) \geq 1\} = \lambda(t)h + o(h)$, 此时有:

$$P\{N(t+h) - N(t) = k\} = \frac{\left(\int_t^{t+h} \lambda(u) du \right)^k \exp\left(-\int_t^{t+h} \lambda(u) du\right)}{k!}$$

事件的发生服从一个 Poisson 过程, 每一次事件附带一个随机变量, $X(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} Y_i$, 其中 Y_i 独立同分布, 有分布函数 $G(y), EY = \mu, \text{Var} Y = \tau^2$, $N(t)$ 是参数为 λ 的 Poisson 过程, 则称 $X(t)$ 为复合 Poisson 过程。

$\text{Var}(E[Y | N])$ 证明)

$$E[e^{tY} | N = n] = [g_X(t)]^n$$
$$\Rightarrow g_Y(t) = E\{E[\exp\{tY\} | N]\} = E\{[g_X(t)]^N\}$$
$$\Rightarrow g_Y'(t) = E[N(g_X(t))^{N-1} g_X'(t)]$$
$$g_Y''(t) = E[N(N-1)(g_X(t))^{N-2} (g_X'(t))^2 + N(g_X(t))^{N-1} g_X''(t)]$$
$$EY = E[NE(X)] = EN \cdot EX$$
$$\Rightarrow EY^2 = EN \cdot \text{Var} X + EN^2 \cdot E^2 X$$
$$\text{Var} Y = EN \cdot \text{Var} X + E^2 X \cdot \text{Var} N$$

生成函数:

$$\phi_X(s) = E(s^X) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k s^k$$
$$EX = \phi_X'(s) \Big|_{s=1}, \quad E\{X^r\} = \frac{d^r}{ds^r} \phi_X(s) \Big|_{s=1}$$
$$Y = \sum_{i=1}^N X_i \Rightarrow \phi_Y(s) = E\{(\phi_X(s))^N\} = \phi_N(\phi_X(s))$$

收敛

三种收敛:

- 依概率收敛: $X_n \xrightarrow{P} X \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} P(|X_n - X| \geq \epsilon) = 0$;
- 几乎必然收敛: $X_n \rightarrow X, \text{a.s.} \Leftrightarrow P(\lim_{n \rightarrow \infty} (X_n - X) = 0) = 1$;
- 均方收敛: $X_n \xrightarrow{L_2} X \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} E(X_n - X)^2 = 0$;
- 关系: 均方收敛和几乎必然收敛都蕴含依概率收敛;

$$Y_1 \sim G(y) \Rightarrow P\{Y_1 + Y_2 \leq y\} = \int_{-\infty}^{\infty} G(y-z) dG(z)$$

$$\Rightarrow P\{X(t) \leq x\} = P\left\{\sum_{k=1}^{N(t)} Y_k \leq x\right\}$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} P\left\{\sum_{k=1}^{N(t)} Y_k \leq x \mid N(t) = n\right\} P\{N(t) = n\}$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} P\left\{\sum_{k=1}^n Y_k \leq x\right\} \frac{(\lambda t)^n e^{-\lambda t}}{n!}$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda t)^n e^{-\lambda t}}{n!} G^{(n)}(x)$$

复合 Poisson 过程的研究也可以使用随机变量和的方法。更新过程让时间间隔 X_i 服从一般的分布函数 $F(x), W_0 = 0, W_n = \sum_{i=1}^n X_i$, 则称 $N(t) = \max\{n : W_n \leq t\}$ 为更新过程, 更新过程满足下式, 其中 $F^{(n)}(t)$ 指 $F(t)$ 的 n 次卷积 (可以用矩母函数求这个卷积):

$$P\{N(t) = n\} = F^{(n)}(t) - F^{(n+1)}(t)$$

Markov 过程

离散时间 Markov 链

核心: Markov 性 (第 $t+s$ 时刻只与 s 时刻相关)

离散时间 Markov 链一般用转移概率矩阵 $P = (p_{ij})_{nn}$ 来表示，表示从 i 到 j 的概率，每一行对应一个状态，行和为 1。
单个状态（比如初始状态 π 是）**行向量**
Chapman-Kolmogorov 方程：

$$P_{ij}^{(n+m)} = \sum_{k=0}^{\infty} P_{ik}^{(m)} P_{kj}^{(n)}$$

另外，随着我们讨论的深入，我们需要引入一些概念：

- **周期 $d(i)$** ：所有满足 $P_{ii}^{(n)} > 0$ 的 n 的最大公约数，如果不存在这样的 $n \geq 1$ 则认为周期为 ∞ ； $d(i) = 1$ 称为非周期；
- **正则**：存在 n 使得 P^n 的元素全部非零；
- $f_{ij}^{(n)} = P\{X_n = j, X_k \neq j, k = 1, 2, \dots, n-1 \mid X_0 = i\}$ ：从 i 出发在 n 步转移首次到达 j 的概率； $f_{ij} = \sum_{n=1}^{\infty} f_{ij}^{(n)}$ ，即会到达 j 的概率；
- 常返 $\Leftrightarrow f_{ii} = 1$ ；瞬过 $\Leftrightarrow f_{ii} < 1$ ；
- 常返时 T_i ：首次返回 i 的时刻， $\mu_i = ET_i = \sum_{n=1}^{\infty} n f_{ii}^{(n)}$ ；根据常返时可以将状态分为零常返 $\mu_i = \infty$ 和正常返 $\mu_i < \infty$ ；
- 正常返，非周期称为遍历 (ergodic)；遍历性的直观理解是指经过足够长的时间，单条轨迹可以反映整个系统的性质；

周期性、常返性是一种等价类共有的性质。
基本极限定理：

- i 是瞬过或零常返： $\lim_{n \rightarrow \infty} P_{ii}^{(n)} = 0$ ；
- i 是周期为 d 的常返状态： $\lim_{n \rightarrow \infty} P_{ii}^{(nd)} = \frac{d}{\mu_i}$ ；
- i 是非周期的正常返状态： $\lim_{n \rightarrow \infty} P_{ii}^{(n)} = \frac{1}{\mu_i}$

平稳分布（定义为不动点）定理：对于不可约、遍历的 Markov 链，其平稳分布是唯一的、且就是极限分布。

分支过程

分支过程也可以看作一个随机变量和的问题，设 $EZ_1 = \mu, \text{Var} Z_1 = \sigma^2$ ，则由随机变量和均值方差的递推公式，有：

$$\begin{aligned} EX_{n+1} &= \mu^n \\ \text{Var} X_{n+1} &= \sigma^2 \mu^n [1 + \mu + \dots + \mu^n] \\ &= \begin{cases} \sigma^2 \mu^n \frac{1-\mu^{n+1}}{1-\mu}, & \mu \neq 1 \\ (n+1)\sigma^2, & \mu = 1 \end{cases} \end{aligned}$$

使用生成函数 $\phi(s)$ 来研究：

$$\phi(s) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k s^k, \quad \phi_{n+1}(s) = \phi_n(\phi(s))$$

则：

- 群体消亡概率是 $\pi = \phi(\pi)$ 的最小正解；
- $\mu = EZ_1 \leq 1 \Leftrightarrow \pi = 1$

连续时间 Markov 链

定义：随机过程 $\{X(t), t \geq 0\}$ ，满足：

$$\begin{aligned} P\{X(t+s) = j \mid X(s) = i, X(u), 0 \leq u < s\} \\ = P\{X(t+s) = j \mid X(s) = i\} \end{aligned}$$

平稳过程

严平稳过程：

$$\begin{aligned} X &= \{X(t), t \in T\} \\ \forall k, \forall t_1 < t_2 < \dots < t_n, \quad t_1, t_2, \dots, t_n &\in T, \quad \forall h \end{aligned}$$

$$\text{s.t. } \{X(t_1), X(t_2), \dots, X(t_k)\} \stackrel{d}{=} \{X(t_1+h), X(t_2+h), \dots, X(t_n+h)\}$$

宽平稳过程：均值为常数，二阶矩存在且协方差仅与时间差有关。
Gauss 过程： $G = \{G(t), -\infty < t < \infty\}$ ，若对 $\forall k, t_1 \leq t_2 \leq \dots \leq t_k$ ，则 $(G(t_1), G(t_2), \dots, G(t_k))$ 的联合分布为 k 维正态分布，则称 G 为 Gauss 过程。

遍历性

对于宽平稳过程我们常研究其均值或协方差遍历性，对于 $X = \{X(t), -\infty < t < \infty\}$ ，若满足以下式子，则称为满足均值或协方差遍历性（对于 $[0, \infty)$ 上的随机过程定义类似）：

$$\bar{X} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T X(t) dt \stackrel{L_2}{=} m$$

$$\bar{X} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{k=-N}^N X(k) \stackrel{L_2}{=} m$$

$$\hat{R}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T (X(t) - m)(X(t+\tau) - m) dt \stackrel{L_2}{=} R(\tau)$$

$$\hat{R}(\tau) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{k=-N}^N (X(k+\tau) - \hat{m}_N)(X(k) - \hat{m}_N) \stackrel{L_2}{=} R(\tau)$$

均值遍历性定理：

- 对于平稳序列 $X = \{X_n, n = 0, \pm 1, \dots\}$ ，则 X 有遍历性的充要条件为 $\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{\tau=0}^{N-1} R(\tau) = 0$ ；（特别地，若 $R(\tau) \rightarrow 0, \tau \rightarrow \infty$ ，则均值遍历性成立）
- 对于平稳过程 $X = \{X(t), -\infty < t < \infty\}$ ， X 有遍历性的充要条件为 $\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^{2T} (1 - \frac{\tau}{2T}) R(\tau) d\tau = 0$ ；（特别地，若 $\int_{-\infty}^{\infty} |R(\tau)| d\tau < \infty$ ，则均值遍历性成立）

协方差的遍历性较为复杂，但是，当 $X = \{X_n, n = 0, \pm 1, \dots\}$ 是均值为 0 的 Gauss 过程，若 $\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} R^2(k) = 0$ ，则满足遍历性。

功率谱密度

我们常用协方差函数和功率谱密度来研究一个平稳过程，Wiener-Khinchine 公式连接着它们两者：

$$R(\tau) \xleftrightarrow{\text{FFT}} S(\omega)$$

对平稳序列，FFT 应换为 DFTF。由于 $R(\tau)$ 和 $S(\omega)$ 都是偶函数，Wiener-Khinchine 一般写成余弦变换的形式（注意正交基发生了变化）。留数定理对该题非常有用，需要牢记。
有理谱密度应该符合以下两个条件：

1. 实、偶函数；
2. 分母不能有实根；
3. 分母多项式次数至少应比分子高 2 次；

Brown 运动

定义： $\{X(t), t \geq 0\}$ 是一个 Brown 运动，如果满足以下条件：

1. $X(0) = 0$ ；
2. X 有平稳独立增量；
3. $\forall t > 0, X(t) \sim N(0, c^2 t)$ ($c = 1$ 时称为标准 Brown 运动)。

记：

$$f_t(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{x^2}{2t}}$$

则 $\forall 0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n, (X(t_1), X(t_2), \dots, X(t_n))$ 的联合概率密度函数为：

$$f_{t_1, t_2, \dots, t_n}(x_1, x_2, \dots, x_n) = f_{t_1}(x_1) \prod_{i=2}^n f_{t_i - t_{i-1}}(x_i - x_{i-1})$$

推论（协方差函数）：

$$\begin{aligned} \text{Cov}(X(s), X(t)) &= \text{Cov}(X(s), X(s) + (X(t) - X(s))) \\ &= \text{Cov}(X(s), X(s)) + \text{Cov}(X(s), X(t) - X(s)) \\ &= s + 0 = s \\ \Rightarrow \text{Cov}(X(s), X(t)) &= \min(s, t) \end{aligned}$$